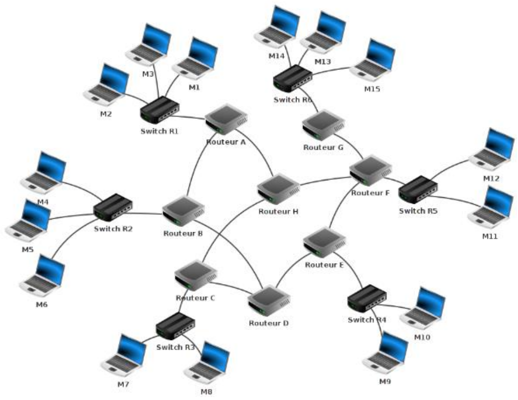
LYCÉE MARCELLIN BERTHELOT QUESTEMBERT — Le chemin de votre réussite	**Les graphes**	N.S.I.

1. Exemples de graphes

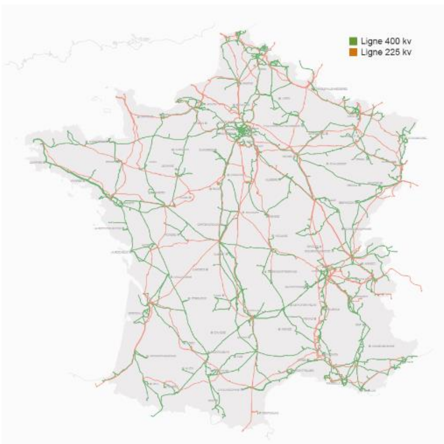
La représentation d'informations sous formes de graphes est beaucoup utilisée.

Réseau social

Réseau Internet



Réseau de transport d'électricité



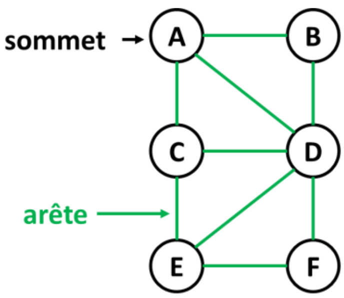
Réseau Très Haute Tension (THT) en France
Source : RTE 2015

Réseau de transport urbain

2. Définition des graphes

Soit un réseau social constitué de six abonnés (A, B, C, D, E et F) où :

- A est ami avec B, C et D ;
- B est ami avec A et D ;
- C est ami avec A, E et D ;
- D est ami avec tous les autres abonnés ;
- E est ami avec C, D et F ;
- F est ami avec E et D.



Dans le graphe ci-contre qui représente le réseau social :

- Chaque abonné est représenté par un cercle avec son nom. C'est un **sommet**.
- Chaque relation "X est ami avec Y" par un segment de droite reliant X et Y ("X est ami avec Y" et "Y est ami avec X" étant représenté par le même segment de droite). C'est une **arête**.

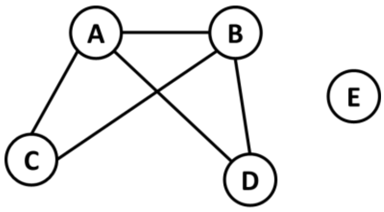
Les graphes

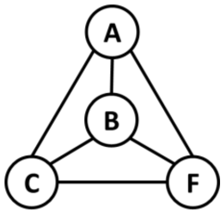
N.S.I.

On appelle **graphe** la donnée d'un ensemble de points appelés **sommets** et d'un ensemble de lignes appelées **arêtes** (ou **arcs** dans le cas d’un graphe orienté) qui relient certains sommets entre eux.

- Le nombre de sommets d'un graphe s'appelle l’**ordre du graphe**.
- Deux sommets reliés entre eux par une arête sont dits **adjacents**.
- Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes issues de ce sommet.
- Un sommet qui n'est adjacent à aucun autre sommet du graphe est dit **isolé**.
- Un graphe est dit **complet** si deux sommets quelconques distincts sont toujours adjacents.
    - Autrement dit, tous les sommets sont reliés deux à deux par une arête.

Le graphe est d’ordre 5 car il possède 5 sommets.
Les sommets A et B sont adjacents.
Les sommets C et D ne sont pas adjacents.
Le sommet E isolé.

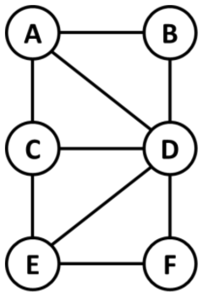




Le graphe ci-contre est complet d’ordre 4.

Pour le graphe ci-contre :

✍ Donner le degré de chaque sommet.



✍ Donner son ordre.

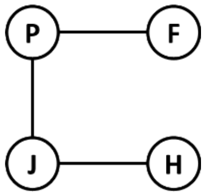
✍ Ce graphe est-il complet ?

✍ Construire un graphe de réseau social à partir des informations suivantes :

- A est ami avec B et E.
- B est ami avec A et C.
- C est ami avec B, F et D.
- D est ami avec C, F et E.
- E est ami avec A, D et F.
- F est ami avec C, D et E.

3. Graphes orientés et non orientés

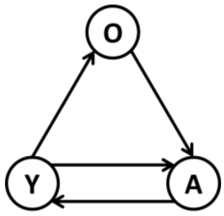
Un graphe peut être **orienté** ou **non orienté**.



Par exemple, sur Facebook :

- Paul est ami avec Flavien.
- Henri est ami est Julianne.
- Paul est ami avec Julianne.

La relation est non orientée car si Paul est ami avec Flavien alors Flavien est ami avec Paul, la relation va de Paul vers Flavien et de Flavien vers Paul.



Autre exemple, sur Twitter :

- Owen suit Amélie.
- Amélie suit Yves.
- Yves suit Amélie et Owen.

La relation est orientée car si Owen suit Amélie, Amélie ne suit pas Owen. La relation va de d'Owen vers Amélie mais pas d'Amélie vers Owen.

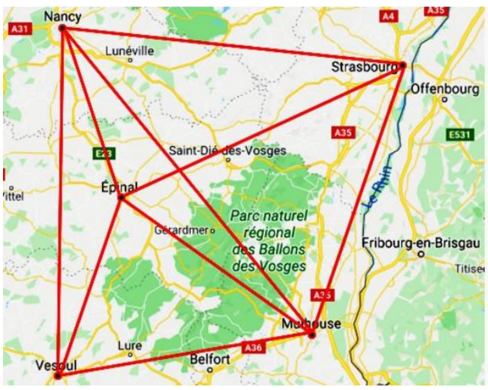
Dans un **graphe non orienté**, les relations sont des **arêtes**.
Dans un **graphe orienté**, les relations sont des **arcs**.

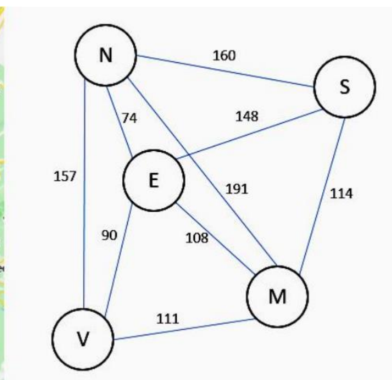
✍ Représenter un graphe correspondant au descriptif routier ci-dessous :

- Il existe une route entre A et C (double sens).
- Il existe une route entre A et B (sens unique B → A).
- Il existe une route entre A et D (sens unique A → D).
- Il existe une route entre B et F (sens unique B → F).
- Il existe une route entre B et E (sens unique E → B).
- Il existe une route entre B et G (double sens).
- Il existe une route entre D et G (double sens).
- Il existe une route entre E et F (double sens).

4. Graphes pondérés

Dans un graphe pondéré, chaque arc ou arête va être associé à une valeur. C'est le cas pour un graphe routier qui sera pondéré en kilomètres comme ci-dessous ou en temps.





5. Implémentation des graphes

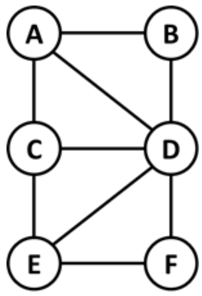
Il existe deux méthodes permettant d'implémenter un graphe : les **matrices d'adjacences** et les **listes d'adjacences**.

5.1. Matrice d'adjacence

Dans une matrice d'adjacence, à chaque ligne correspond un sommet du graphe et à chaque colonne correspond aussi un sommet du graphe. À chaque intersection ligne i - colonne j (ligne i correspond au sommet i et colonne j correspond au sommet j), on place un 1 s'il existe une arête (ou arc) entre le sommet i et le sommet j, et un zéro s'il n'existe pas d'arête entre le sommet i et le sommet j.

- Il existe une arête entre le sommet D et le sommet B, donc il y a un 1 à l'intersection entre la ligne D et la colonne B (de même entre la ligne B et la colonne D).
- Il n'existe pas d'arête entre le sommet F et le sommet C, donc il y a un 0 entre la ligne F et la colonne C (de même entre la ligne C et la colonne F).

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	1	0	0
B	1	0	0	1	0	0
C	1	0	0	1	1	0
D	1	1	1	0	1	1
E	0	0	1	1	0	1
F	0	0	0	1	1	0



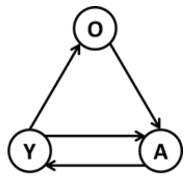
Une matrice est un tableau de nombres. Elle peut être représentée en machine simplement par une liste de listes. Si on note **`mat`** une matrice, l'élément qui est en i-ième ligne et en j-ième colonne est accessible en Python à l'aide de **`mat[i][j]`**.

En Python, la matrice du graphe précédent s'écrira :

```
mat = [[0, 1, 1, 1, 0, 0],
       [1, 0, 0, 1, 0, 0],
       [1, 0, 0, 1, 1, 0],
       [1, 1, 1, 0, 1, 1],
       [0, 0, 1, 1, 0, 1],
       [0, 0, 0, 1, 1, 0]]
```

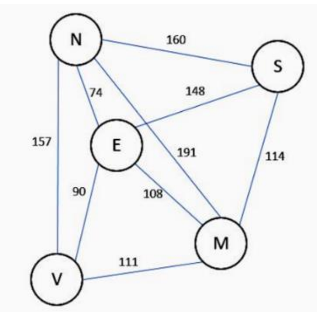
Dans le cas d'un graphe orienté :

0	1	0
0	0	1
1	1	0

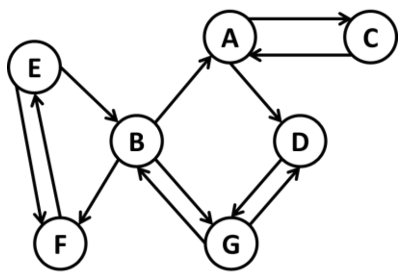


Dans le cas d'un graphe pondéré, il faut placer la valeur de l'arête :

0	114	111	108	191
114	0	0	148	160
111	0	0	90	157
108	148	90	0	74
191	160	157	74	0



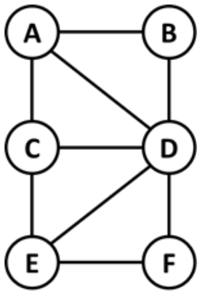
✍ Créer la matrice d'adjacence du graphe ci-contre.



5.2. Liste d'adjacence

Une liste d'adjacence contient la liste des sommets, et à chaque élément de cette liste on associe les sommets adjacents.

- A → B, C, D
- B → A, D
- C → A, D, E
- D → A, B, C, E, F
- E → C, D, F
- F → D, E



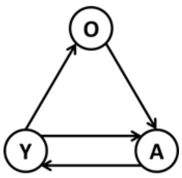
En Python, on obtient un dictionnaire ayant pour clé les sommets et pour valeurs la liste des sommets adjacents :

```
liste = {'A': ['B', 'C', 'D'], 'B': ['A', 'D'], 'C': ['A', 'D', 'E'],
         'D': ['A', 'B', 'C', 'E', 'F'], 'E': ['C', 'D', 'F'], 'F': ['D', 'E']}
```

Pour les graphes orientés, il est nécessaire de définir deux listes : la liste des successeurs et la liste des prédécesseurs.
Soit un arc allant d'un sommet A vers un sommet B (flèche de A vers B). On dira que B est un successeur de A et que A est un prédécesseur de B.

Liste des successeurs :

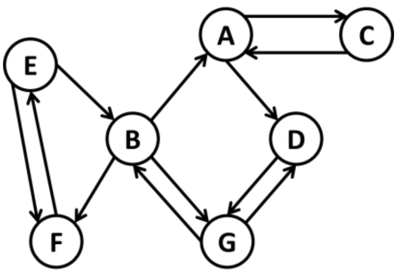
- O → A
- A → Y
- Y → A, O



Liste des prédécesseurs :

- O → Y
- A → O, Y
- Y → A

✍ Donner la liste d'adjacence du graphe ci-contre.



6. La représentation à choisir

Le choix de l'implémentation à utiliser (matrice d'adjacence ou liste d'adjacence) se fait en fonction de la densité du graphe, c'est-à-dire du rapport entre le nombre d'arêtes et le nombre de sommets. Pour un graphe dense on utilisera plutôt une matrice d'adjacence.
Certains algorithmes travaillent plutôt avec les listes d'adjacences alors que d'autres travaillent plutôt avec les matrices d'adjacences. Le choix doit donc aussi dépendre des algorithmes utilisés.

Source : https://isn-icn-ljm.pagesperso-orange.fr/NSI-TLE/co/section_chapitre4.html
https://pixees.fr/informatiquelycee/n_site/nsi_term_structDo_graphe.html